Cadre : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I Notion d'indépendance

1) Indépendance d'évènements

Définition 1. Deux évènements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Définition 2. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements est dite indépendante dans son ensemble si, pour tout $J \subset I$ fini, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Remarque 3. *(i) Si $I = \{1, 2\}$, on retrouve la définition de deux évènements indépendants.*

(ii) Si n évènements sont indépendants dans leur ensemble, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Exemple 4. *On considère $\Omega = [\![1, 4]\!]$ muni de la tribu discrète et de la probabilité uniforme. Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ et $C = \{1, 4\}$. Alors A, B, C sont indépendants dans leur ensemble mais pas deux à deux.*

Proposition 5. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements indépendants. On suppose que $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Soit $(B_i)_{i \in I}$ la famille d'évènements définis par $B_i = A_i$ si $i \in I_1$ et $B_i = A_i^c$ si $i \in I_2$. Alors les B_i sont indépendants dans leur ensemble.*

2) Indépendance de variables aléatoire

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans des espaces probabilisables $(E_i, \mathcal{E}_i)$.

Définition 6. Les variables aléatoires X_i sont dites indépendantes si, pour toute famille d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ avec $A_i \in \mathcal{E}_i$, les évènements $(X_i \in A_i)$ sont indépendants dans leur ensemble.

Proposition 7. *Les variables aléatoires X_i sont indépendantes si, et seulement si, pour toute famille d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ avec $A_i \in \mathcal{E}_i$:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Proposition 8. *On suppose que les X_i sont des variables aléatoires discrètes et que $I = [\![1, n]\!]$. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes si, et seulement si, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$:*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \ldots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Proposition 9. *On suppose que les X_i sont indépendantes. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires définies sur $(E_i, \mathcal{E}_i)$ à valeurs dans des espaces probabilisables $(F_i, \mathcal{F}_i)$. Alors les variables aléatoires $f_i \circ X_i$ sont indépendantes.*

Corollaire 10. *On suppose que les X_i sont des variables aléatoires discrètes indépendantes et que $I = [\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, soient $f_1 : E_1 \times \ldots \times E_k \to F_1$ et $f_2 : E_{k+1} \times \ldots \times E_n \to F_2$. Alors les variables aléatoires $f_1(X_1, \ldots, X_k)$ et $f_2(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.*

Exemple 11. *Si X_1, X_2, X_3 et X_4 sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, les variables aléatoires $X_i + X_j$ et $X_k + X_l$ sont indépendantes pour $i, j, k, l \in [\![1, 4]\!]$ distincts.*

Exemple 12 (Box-Muller)**.** *Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}(]0, 1[)$, et posons $X = \sqrt{-2\ln(V)}\cos(2\pi U)$ et $Y = \sqrt{-2\ln(V)}\sin(2\pi U)$. Alors X et Y sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.*

3) Indépendance de sous-tribus

Définition 13. Une famille de sous-tribus $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ pour $i \in I$ est indépendante dans son ensemble si toute famille d'évènements $A_i \in \mathcal{A}_i$ pour $i \in I$ est indépendante dans son ensemble.

Exemple 14. *On considère $\Omega = [0, 1]$ muni de sa tribu borélienne et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_n = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}} \left]\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]$. La famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est indépendante.*

Proposition 15. *Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Soit $(I_l)_{l \in L}$ une partition de I. La famille des tribus $(\sigma(\mathcal{A}_i | i \in I_l))_{l \in L}$ est une famille indépendante.*

II Indépendance et caractérisation de loi

1) Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle.

Définition 16. On définit la fonction de répartition F_X de X par :

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

Proposition 17. *F_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

Proposition 18. *(i) F_X est croissante, continue à droite, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.*

(ii) Réciproquement, toute fonction satisfaisant le point précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

(iii) Si f est une densité de probabilité, alors $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{P}_Y$ admette pour densité f.

Proposition 19. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F. Alors $F_{\max(X_i)}(t) = F(t)^n$ et $F_{\min(X_i)}(t) = 1 - (1 - F(t))^n$.*

Corollaire 20. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. Posons $M_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. Alors $M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ et $n(1 - M_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$.*

2) Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 21. On définit la fonction caractéristique φ_X de X par :

$$\varphi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, X\rangle}\right] \end{array} \right.$$

Proposition 22. *φ_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

Proposition 23. *Si X est réelle et $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$, alors φ_X est p fois dérivable et $\varphi_X^{(p)}(\lambda) = i^p \mathbb{E}\left[X^p e^{i\lambda X}\right]$. En particulier, $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}[X^p]$.*

Proposition 24. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors :*

(i) $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

(ii) Pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$

Application 25. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendantes.*

(i) Si $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$.

(ii) Si $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

3) Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 26. On définit la fonction génératrice G_X de X par :

$$G_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \mathbb{E}\left[s^X\right] \end{array} \right.$$

Remarque 27. *Le rayon de convergence de cette série est au moins égal à 1 et $G_X(1) = 1$.*

Proposition 28. *G_X caractérise $\mathbb{P}_X$. En particulier, on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0)$.*

Proposition 29. *$\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$ si, et seulement si, G_X est p fois dérivable et dans ce cas $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)]$.*

Application 30. $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$ *et* $\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Proposition 31. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :*

(i) $G_{X+Y} = G_X G_Y$

(ii) Pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $G_{(X,Y)}(t_1, t_2) = G_X(t_1)G_Y(t_2)$.

(iii) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $G_{(X,Y)}(s, s) = G_X(s)G_Y(s)$.

Application 32. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $E = \mathbb{N}$ indépendantes.*

(i) Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$, alors $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

(ii) Si $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

III Applications

1) Loi du 0-1 et lemme de Borel-Cantelli

Définition 33. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille indépendante de tribus sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On désigne par $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par $T_n, T_{n+1}, \dots$ et on pose $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$. La tribu $\mathcal{A}_\infty$ est appelée tribu des évènements terminaux, ou tribu terminale de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 34 (Loi du 0-1)**.** *Soit $\mathcal{A}_\infty$ une tribu terminale. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}_\infty$, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Exemple 35. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m$ est un évènement terminal pour la suite de tribus $T_n = \{\varnothing, \Omega, A_n, A_n^c\}$, donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Théorème 36 (Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite d'évènements.*

(i) Si $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

(ii) Si $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et les A_n sont indépendants, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Application 37. *On lance une infinité de fois une pièce équilibrée, on obtiendra presque sûrement une infinité de fois 42 piles consécutifs.*

2) Théorème central limite

Théorème 38 (Théorème central limite)**.** *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Application 39. *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de loi $\mathcal{B}(p)$ pour $p \in [0,1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour p en fonction de la moyenne empirique $\widehat{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$. Il s'agit de :*

$$IC_\alpha = \left[\widehat{p_n} \pm \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]$$

où q_t est le quantile d'ordre t de $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème 40. *Soit $(X_{n,j})_{n\in\mathbb{N}^\star, j\in[\![1,M_n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$, avec $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite croissante de $\mathbb{N}^\star$ qui tend vers $+\infty$. On pose $\mathbb{P}(X_{n,j} = 1) = p_{n,j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j}$. On suppose de plus que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda > 0$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

3) Processus de Galton-Watson

Théorème 41 (Galton-Watson)**.** *Soient $(X_i^j)_{i,j\in\mathbb{N}^\star}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur loi et m leur espérance. On définit le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $\pi_\infty = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0)$. Alors si $\mu \neq \delta_1$, on a :*

(i) Si $m \leqslant 1$, alors $\pi_\infty = 1$: Il y a extinction presque sûre du processus.

(ii) Si $m > 1$, alors $\pi_\infty < 1$: Il y a une probabilité non nulle de survie.

Développements

— Théorème central limite et intervalle de confiance (38,39) [BL07]

— Loi des évènements rares de Poisson (40) [Ouv09]

— Processus de Galton-Watson (41) [App13] [Ouv09]

Références

[BL07] P. Barbe et M. Ledoux. *Probabilité.* EDP Sciences

[App13] W. Appel. *Probabilités pour les non probabilistes.* H&K

[Ouv08] J.-Y. Ouvrard. *Probabilités : Tome 1.* Cassini

[Ouv09] J.-Y. Ouvrard. *Probabilités : Tome 2.* Cassini